Letteratura e Geometria frattale

Un esempio di attività didattica multidisciplinare

Cultura classica tra innovazione e tradizione

un’esperienza didattica al Liceo Mamiani di Roma

Abituati a una tradizione che ci guida a considerare storia, arte e scienza su scale di identità diverse insegniamo, agli studenti del nostro liceo, che nessuna differenza separa l’arte dalla scienza e che la cultura, unica e indivisibile, permette a generazioni diverse di comunicare attraverso quel movimento di idee, quel dialogo intellettuale vivace e appassionante che la scuola non deve dimenticare di accendere.

(dalla homepage del sito *mamianilab* che raccoglie approfondimenti, percorsi interdisciplinari e multidisciplinari, oltre a notizie sulla storia della scuola e alle schede di catalogo delle collezioni museali del liceo)

L’interconnessione tra letteratura e scienza

Il nostro modulo didattico, caratterizzato da un approccio multidisciplinare, a partire dalla definizione di rapporto aureo Φ, studia le caratteristiche della spirale logaritmica e della curva di Koch, come esempi di frattale, per poi collegare la geometria frattale alle figure retoriche poetiche e letterarie che si basano sull’astrazione dei concetti e su immagini geometriche come rappresentazione della realtà.

Partendo dalla lettura dei testi conservati nella Biblioteca d’Istituto e dagli strumenti delle collezioni scientifiche del Liceo, gli studenti hanno potuto approfondire alcuni concetti razionali astratti mediante i quali il pensiero umano studia e rappresenta la realtà.

La rappresentazione della realtà nella poesia

In un saggio del 1977, “letteratura e scienza” Galvano Della Volpe analizza la razionalità del poeta.

Nel dare forma alle cose, il percorso del poeta sarà simile a quello di uno scienziato; dovrà cioè ragionare e pensare e, quindi, fare i conti con la verità e la realtà.

Dare voce ad una realtà molteplice e disgregata significa ricondurla ad un significato razionale che renda parlanti o espressive le immagini. Non meno di ciò che accade alle immagini e al molteplice quando ricevono significato, ossia unità, nella scienza e nella storia.

Tale concetto viene esemplificato con l’uso, in poesia, delle figure retoriche, prime fra tutte la metafora e la similitudine.

L’immagine altra rispetto al molteplice che si vuole descrivere diventa essa stessa il principio ordinatore della realtà, si ripete cioè nella sua forma per dare, in questo caso ordine e significato a una realtà caotica percepita dai sensi.

Lo sapeva bene Leonardo Sinisgalli, poeta, ingegnere e pubblicista, vissuto tra il 1908 e il 1981, che spesso nelle sue poesie ha ripreso delle immagini tratte dalla matematica per dare ordine ai suoi pensieri e alla descrizione della realtà.

Leonardo Sinisgalli (1908-1981)

Il ragno

Come il ragno
costruisco con niente,
lo sputo, la polvere,
un po' di geometria.

Infinitesimi

Le linee di crescita di un fiore, di una foglia, la disposizione dei semi di un girasole le conoscete?

[…] Uno strano numero entra come determinante in queste linee generatrici. […]

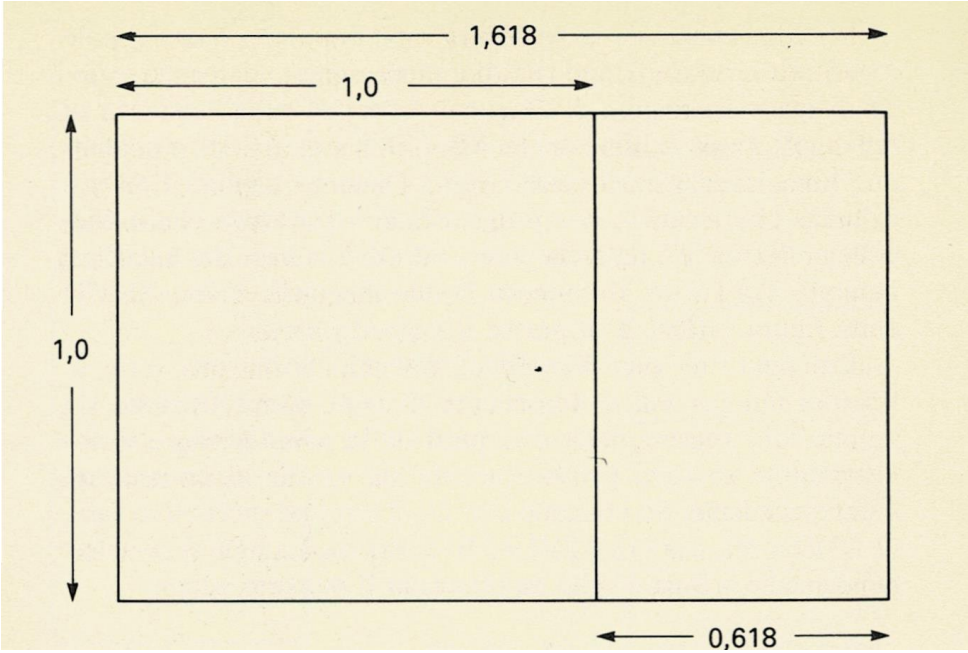
E' il numero Φ […].

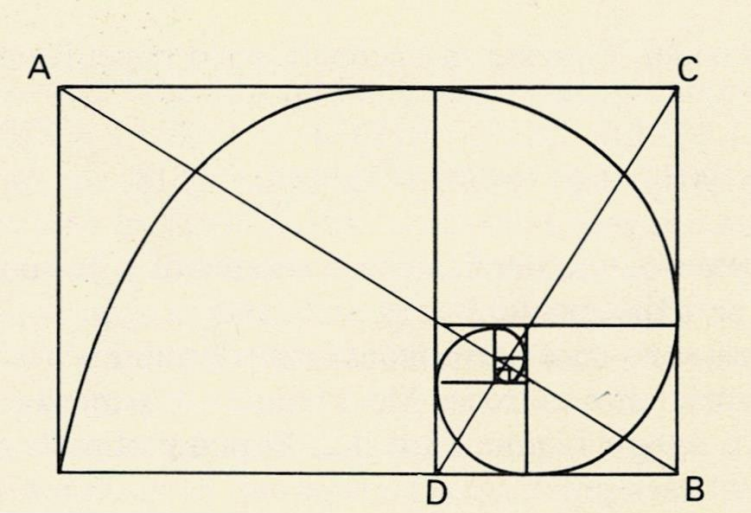
Ed eccoci arrivati alla spirale, quella delle pigne, del guscio della lumaca, delle galassie, delle colonia di bacilli.

L. Sinisgalli, *L'odor moro*

Le forme naturali: il rapporto aureo

Si chiama *rapporto aureo*, e lo si indica con ϕ, il rapporto tra un segmento e la sua sezione aurea. Si può dimostrare che $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339\ldots$ Se si disegna un rettangolo i cui lati sono in rapporto aureo e, al suo interno si traccia un quadrato in cui uno dei lati è costituito dal lato minore del rettangolo, si otterrà ancora un rettangolo in cui il rapporto dei lati è ancora ϕ. Ripetendo più volte tale costruzione, si ottiene una successione di quadrati ognuno dei quali ha il lato che è sezione aurea del lato del quadrato successivo. Costruendo un arco di circonferenza inscritto in ogni quadrato, avente il centro sul vertice del quadrato, che non appartenga all'arco precedente e che si trovi sul lato che contiene il centro precedente, si ottiene una curva detta *spirale logaritmica*. Il suo centro è rappresentato dall'intersezione di una qualsiasi coppia di diagonali tracciate sulla sequenza di rettangoli. Se si osserva una minuscola porzione centrale della spirale attraverso una lente di ingrandimento, si vede la spirale originale immutata. Essa, dunque, rappresenta una curva che deve *crescere* mantenendo la propria identità topologica. L'"autosomiglianza" che si osserva quando si cambia l'ingrandimento, è la proprietà che definisce quelle particolari figure geometriche che sono chiamate frattali: le parti, in scala ridotta, sono simili al tutto. Tale curva si ritrova in natura, ad esempio, nella conchiglia del Nautilus.





Il naso di Pinocchio

La caotica rappresentazione

della realtà

Il povero Pinocchio, interrogato dalla Fata, vorrebbe fornire una versione falsa ma plausibile dei fatti accaduti. Egli cerca di costruire una realtà diversa; infatti il suo naso,dopo la prima bugia, cresce in modo proporzionale. Poi, però, la situazione gli sfugge di mano, le bugie si susseguiranno in modo caotico e irrazionale. Il suo naso, ormai cresciuto a dismisura, non permetterà più al povero burattino di muoversi nella realtà circostante. Soltanto i picchi, chiamati dalla Fata, riusciranno a ridurre il naso alla giusta proporzione secondo “la sua grandezza naturale”.

-E ora le quattro monete dove le hai messe? — gli domandò la Fata. — Le ho perdute! — rispose Pinocchio; ma disse una bugia, perché invece le aveva in tasca. Appena detta la bugia **il suo naso, che era già lungo, gli crebbe subito due dita di più.**

— E dove le hai perdute? — Nel bosco qui vicino. — A questa seconda bugia, **il naso seguitò a crescere.**

— Se le hai perdute nel bosco vicino — disse la Fata — le cercheremo e le ritroveremo: perché tutto quello che si perde nel vicino bosco, si ritrova sempre.

— Ah! ora che mi rammento bene — replicò il burattino imbrogliandosi — le quattro monete non le ho perdute, ma senza avvedermene, le ho inghiottite mentre bevevo la vostra medicina. — A questa terza bugia, **il naso gli si allungò in un modo così straordinario, che il povero Pinocchio non poteva più girarsi da nessuna parte.** Se si voltava di qui, batteva il naso nel letto o nei vetri della finestra, se si voltava di là, lo batteva nelle pareti o nella porta di camera, se alzava un po’ più il capo, correva il rischio di ficcarlo in un occhio alla Fata.

E la Fata lo guardava e rideva. — Perché ridete? — gli domandò il burattino, tutto confuso e impensierito di quel suo naso che cresceva a occhiate. — Rido della bugia che hai detto. — Come mai sapete che ho detto una bugia? — Le bugie, ragazzo mio, si riconoscono subito, perché ve ne sono di due specie: vi sono le bugie che hanno le gambe corte, e le bugie che hanno il naso lungo […] Pinocchio, non sapendo più dove nascondersi per la vergogna, si provò a fuggire di camera; ma non gli riuscì. Il suo naso era cresciuto tanto, che non passava più dalla porta.

[…]la Fata lasciò che il burattino piangesse e urlasse […]. Ma quando lo vide trasfigurato e cogli occhi fuori della testa dalla gran disperazione, allora, mossa a pietà, batté le mani insieme, e a quel segnale entrarono in camera dalla finestra un migliaio di grossi uccelli chiamati Picchi, i quali, posatisi tutti sul naso di Pinocchio, cominciarono a beccarglielo tanto e poi tanto, che in pochi minuti **quel naso enorme e spropositato si trovò ridotto alla sua grandezza naturale.**

Crescite esponenziali

Un altro esempio di frattale è la curva di Koch, oggetto geometrico costruito attraverso una crescita esponenziale. Essa si ottiene a partire da un segmento, di estremi A e B, di lunghezza unitaria, costruendo iterativamente un triangolo equilatero sul terzo centrale di ogni segmento della curva stessa. Il segmento AB è inizialmente lungo 1 *Fig.a* Dopo una prima suddivisione la lunghezza della linea che congiunge A e B è 4/3 (formata da 4 segmenti lunghi 1/3) *Fig.b* Ripetuta l'operazione di suddivisione per ogni segmento, la nuova linea che congiunge A e B è 4/3 della precedente, quindi è lunga $(4/3)^2$ *Fig.c* Ogni volta che si ripete l'operazione, si ha una nuova linea che è i 4/3 della precedente. Si costruisce così una successione numerica formata dalle lunghezze delle linee via via ottenute

$1,\ 4/3,\ (4/3)^2,\ (4/3)^3,\ (4/3)^4, \ldots, (4/3)^n, \ldots$

Raggiunto un certo numero di iterazioni la curva appare come in *Fig.d*. Dopo *n iterazioni* si hanno 4^n segmenti di lunghezza 3^{-n}, quindi la lunghezza cresce come $(4/3)^n$: questo corrisponde a una dimensione frattale $\ln 4/\ln 3 \sim 1{,}2618$. La stranezza della curva risiede nel fatto di essere una linea *infinitamente* spezzettata, anche se, nella rappresentazione, oltre un certo numero, non cogliamo le successive suddivisioni. Questa caratteristica è all'origine del suo comportamento "patologico". La curva di Koch è detta appunto *curva patologica Fig. e*

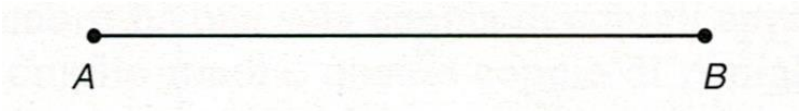


Fig. a

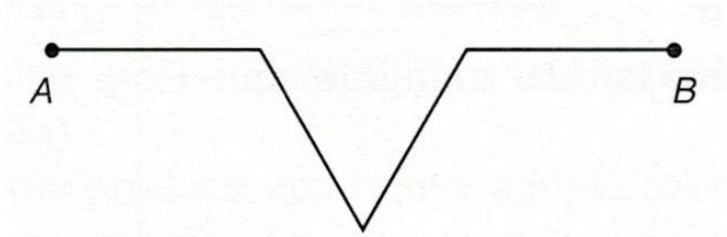


Fig. b

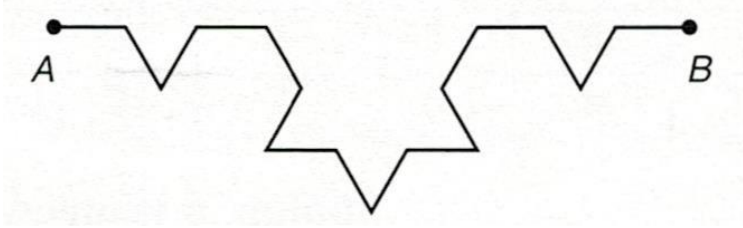


Fig. c

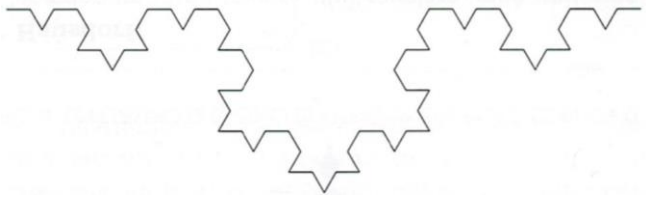


Fig. d

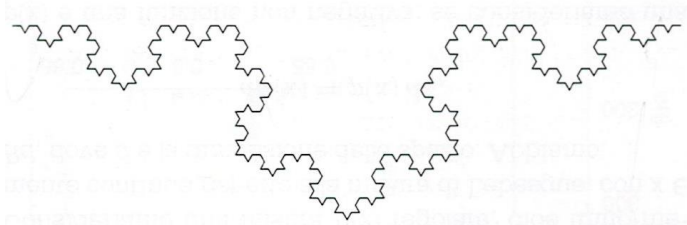


Fig. e

Un fenomeno che si sviluppa secondo una legge esponenziale cresce molto rapidamente. Anche una calunnia si diffonde rapidamente: inizia piano, nella parola detta a un’altra persona e, di passo in passo, il numero di persone che ne vengono a conoscenza si raddoppia fino a scoppiare **«come un rombo di cannone»**

https://www.youtube.com/watch?v=qvkISFpEIIk